De
æquatione quinti gradus quousque licet reducenda

Dissertatio,

quam

Venia Ampliss. Facult. Philos.

p. p.

Mag. JACOBUS NICOLAUS GRANLUND
In Academia Upsaliensi Matheseos Docens

et

EMIL ÖDMANSSON
Scanus

Pridie Id. Jun. MDCCCLII 1852
h. a. m. s.

Lundæ, Lund.
typis Berlingianis,
MDCCCLII.

De æquatione quinti gradus, quousque licet, reducenda.

Magna fuit quæstio, indeque fere a temporibus, quibus inventæ erant æquationum tertii quartique gradus solutiones generales, agitata, possentne æquationes quinti superiorumque graduum generaliter solvi. Initio quidem de solutionibus non dubitarunt viri doctissimi, multique fuerunt conatus, qui ad rem explicandam perducere posse viderentur. Sed frustra susceptis multis laboribus ad disquisitiones generaliores est ventum, atque dubitare etiam coeperunt nonnulli, possentne apparatus analyseos præsentes solvendis æquationibus quinti superiorumque graduum generalibus sufficere. Primus tamen Lagrange, vir illustrissimus, diligentissimo examini re subjecta, satis aperte docuit, cur ad solvendas æquationes generales quattuor tantum graduum, non quinti superiorumve, viis solitis perveniri posset; atque omnino de solutionibus ulterioribus inveniendis dubitasse videtur. Quæ dubitatio ita forsitan sit interpretanda, ut ad apparatus in tali re solitos pertineat. Postea Cl. Abel, theoremate quodam a Cl. Cauchy invento adjutus, demonstrationem exhibuit, qua probari visum est, expressiones radicales iisque adjunctas functiones circulares æquationibus generalibus quinti superiorumve graduum satisfacere non posse. Novissimam inter nostrates demonstrationem præbuit Cl. Professor C. J. Malmstén, qui viam a Cl. Abel initam quibusdam in rebus secutus exitu tamen demonstrationis

diverso utitur. Ceterum multi multa scripsere, nimisque longum foret nomina scriptorum enumerare. Nemo enim fere est in rebus mathematicis egregie versatus, qui hanc totam quæstionem neglexisse videatur.

Sed priusquam ad rem nobis propositam adgrediamur, quam brevissime indicandum videtur, cur solvendis æquationibus quinti superiorumque graduum generalibus expressiones radicales functionesque circulares, quæ ad efficiendos diversos valores expressionum radicalium pertinent, non sufficere videantur; ita tamen, ut demonstrationes rerum ab aliis propositas repetere supersedeamus.

Omnino patet, radices æquationis cujuslibet functionibus coëfficientium*) ejusdem æquationis esse exprimendas. Demonstrarunt etiam nonnulli, si functiones illæ signis radicalibus effici possent, tum partem quamlibet expressionum fore functionem rationalem radicum, tum, ut ad æquationes quinti gradus veniamus, in exprimenda radice æquationis quinti gradus indicem signi radicalis extremi fore 5. Præterea, quum numerus valorum convenientium functioni rationali quinque quantitatum possit esse 120 aut divisor hujus numeri, Cl. Cauchy demonstravit, nulli functioni rationali quinque quantitatum tres aut quattuor valores diversos posse convenire. Unde sequitur, si a signo radicali, cui subjecta esset functio coëfficientium rationalis, incipere placet, indicem signi fore 2 aut 5. Si index esset 5, nulli alii signo radicali subjici posset; demonstratum enim est, signum radicale extremum habiturum indicem 5, nec ulli functioni rationali quinque quantitatum convenire valores, quorum numerus esset 25 aut $25n$, ubi n est numerus integer. Sin index esset 2, alii signo radicali quadratico proxime subjici non posset; si enim ita se res haberet, functioni rationali quinque quantitatum quattuor volores diver-

*) Quibus addas, si placet, numerum, qui gradum æquationis designat.

si convenirent. Nihiloque magis signo radicali cubico proxime subjici posset. Ponamus enim, in exprimenda radice æquationis generalis quinti gradus inesse quantitatem $\sqrt[3]{\beta \pm \sqrt{\gamma}}$, ubi β, γ sunt functiones rationales coëfficientium. Exprimerent igitur formulæ $\sqrt[3]{\beta \pm \sqrt{\gamma}}$, $\sqrt[3]{\beta \mp \sqrt{\gamma}}$; ideoque $\sqrt[3]{\beta^2 - \gamma}$ functiones radicum rationales. Quum vero quantitati $\sqrt[3]{\beta^2 - \gamma}$ tres valores diversi conveniant, inde sequeretur, functioni rationali quinque quantitatum tres valores diversos convenire. Restat igitur expressio $\sqrt[5]{\beta \pm \sqrt{\gamma}}$, quæ 10 valores habet, 120 vero habere deberet, foret enim $\sqrt[5]{}$ signum radicale extremum. Quibus rebus efficitur, functiones coëfficientium radicales æquationi generali quinti gradus solvendæ satisfacere non posse; idemque de æquationibus generalibus graduum superiorum esse dicendum, ratione simili probatur.

Quamvis vero ita se res habeat, quæri tamen potest, num alio quodam modo aliisque functionibus coëfficientium, quam radicalibus atque, ut diversos valores functionum radicalium comprehendat oratio, circularibus, radices æquationis generalis quinti gradus, si ceteras æquationes prætermittere placet, sint exprimendæ, an de solutione omnino sit desperandum. Cui quæstioni ut responderi possit, primum admonemus, si coëfficientibus valores numericos tribueris, semper solutiones numericas inveniri, eaque re satis perspicue significari solutionem aliquam generalem. At dixerit quis, quamvis sit solutio quædam generalis, tamen, ut ea inveniatur, opus fore functionum generibus omni analysi hodiernæ incognitis. Cui objectioni ita respondemus, præter functiones radicales et circulares haud pauca esse functionum genera, quæ

solvendis novis æquationibus inservire possint. Quod si de solvendis æquationibus algebraicis quæritur, post functiones radicales et circulares maximopere commendandæ videntur functiones ellipticæ*) (et si quæ sunt similis naturæ), quibus ut casus admodum speciales subjectæ sunt functiones circulares. Ad solvendam autem æquationem generalem quinti gradus cur aliquid conferre posse videantur functiones ellipticæ, in sequentibus indicabimus. Ceterum, si functiones ellipticæ, circulares et radicales solutioni non sufficerent, ad alias functiones foret quidem confugiendum. Confitemur vero, nobis omnem desperationem de invenienda solutione æquationis generalis quinti gradus absurdam videri. Innumera enim fere sunt functionum genera, quæ analysis habet vel habere poterit.

Enimvero, ut ad rem propositam accedamus, vocabulum *reductionis* multiplici sensu intelligi solet. Omnino tamen expressio quælibet reduci dicitur, si ad formam simpliciorem vel consilio cuidam aptiorem redigitur. Eodem modo æquatio algebraica reduci dicitur, si ad formam simpliciorem vel solutioni aptiorum (id est enim consilium frequentissimum), redigitur. Generalius etiam reduci dicitur, si modo quodam justo et legitimo ad aliam æquationem pervenitur, qua soluta radices æquationis propositæ cognoscentur. Æquatio igitur algebraica et rationalis reduci potest aut ad aliam æquationem ejusdem gradus aut ad æquationem alius cujusdam gradus, quæ sæpissime *æquatio reducta* appellari solet. Ceterum æquatio algebraica, si cum æquationibus graduum inferiorum radices communes habere potest, sensu speciali *reductibilis* appellatur, et ad eas graduum inferiorum æquationes, quæ simul easdem radices suppeditant atque æquatio proposita, reduci posse dicitur. Quamquam de talibus æquationibus hoc loco non dicetur, siquidem de æquatione quinti gradus generali quæretur.

Nondum inventa solutione æquationis generalis quinti gradus, quum de reducenda æquatione illa dicetur, de via ineun-

*) Quo sensu has functiones accepit Cl. C. G. J. Jacobi.

da vix quicquam certi haberi poterit. Restat igitur, ut maxime probabilia sequamur.

Diximus quidem, si radices æquationis generalis quinti gradus functionibus radicalibus coëfficientium functionibusque circularibus exprimi possent, partem quamlibet expressionum fore functionem radicum rationalem. Sed quamvis aliæ functiones sint adsumendæ, haud absurde tamen statuisse videamur, partes diversas expressionum fore functiones radicum rationales. Inquirendum igitur est in functiones rationales quinque quantitatum, quæ sunt radices æquationis generalis quinti gradus, sive, quoniam determinationes functionum rationalium ad determinationes functionum integrarum revocari possunt, in functiones integras quinque quantitatum.

Numerus valorum diversorum, qui functioni rationali vel integræ quinque quantitatum, omnibus permutationibus factis, convenire possunt, est 120 aut divisor hujus numeri. Sed solutio æquationis generalis quinti gradus revocari potest ad inveniendos valores talium functionum quarumdam quinque quantitatum, ut numerus valorum diversorum non sit per 5 divisibilis. Sit enim æquatio generalis quinti gradus

$$(1) \quad \ldots\ldots \quad x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t=o;$$

poni certe poterit si a, b, c, d, e erunt radices hujus æquationis, et α, α^2, α^3, α^4, 1 radices æquationis $\xi^5-1=o$, v. c.

$$(2)\begin{cases} a=-\frac{1}{5}p+\frac{1}{5}(a+\alpha b+\alpha^4c+\alpha^2d+\alpha^3e)+\frac{1}{5}(a+\alpha^2b+\alpha^3c+\alpha^4d+\alpha e)+\frac{1}{5}(a+\alpha^3b+\alpha^2c+\alpha d+\alpha^4e) \\ \qquad +\frac{1}{5}(a+\alpha^4b+\alpha c+\alpha^3d+\alpha^2e), \\ b=-\frac{1}{5}p+\frac{1}{5}(\alpha^4a+b+\alpha^3c+\alpha d+\alpha^2e)+\frac{1}{5}(\alpha^3a+b+\alpha c+\alpha^2d+\alpha^4e)+\frac{1}{5}(\alpha^2a+b+\alpha^4c+\alpha^3d+\alpha e) \\ \qquad +\frac{1}{5}(\alpha a+b+\alpha^2c+\alpha^4d+\alpha^3e), \\ c=-\frac{1}{5}p+\frac{1}{5}(\alpha a+\alpha^2b+c+\alpha^3d+\alpha^4e)+\frac{1}{5}(\alpha^2a+\alpha^4b+c+\alpha d+\alpha^3e)+\frac{1}{5}(\alpha^3a+\alpha b+c+\alpha^4d+\alpha^2e) \\ \qquad +\frac{1}{5}(\alpha^4a+\alpha^3b+c+\alpha^2d+\alpha e), \\ d=-\frac{1}{5}p+\frac{1}{5}(\alpha^3a+\alpha^4b+\alpha^2c+d+\alpha e)+\frac{1}{5}(\alpha a+\alpha^3b+\alpha^4c+d+\alpha^2e)+\frac{1}{5}(\alpha^4a+\alpha^2b+\alpha c+d+\alpha^3e) \\ \qquad +\frac{1}{5}(\alpha^2a+\alpha b+\alpha^3c+d+\alpha^4e), \\ e=-\frac{1}{5}p+\frac{1}{5}(\alpha^2a+\alpha^3b+\alpha c+\alpha^4d+e)+\frac{1}{5}(\alpha^4a+\alpha b+\alpha^2c+\alpha^3d+e)+\frac{1}{5}(\alpha a+\alpha^4b+\alpha^3c+\alpha^2d+e) \\ \qquad +\frac{1}{5}(\alpha^3a+\alpha^2b+\alpha^4c+\alpha d+e), \end{cases}$$

quæ æquationes, substituto valore

$$p = -a - b - c - d - e,$$

identicæ prorsus erunt. Quod si functionem parenthesi inclusam. ex. gr. $a + \alpha b + \alpha^4 c + \alpha^2 d + \alpha^3 e$, considerabimus, erit quidem numerus valorum diversorum, omnibus permutationibus radicum a, b, c, d, e factis, 120, quorum valorum viginti in membris dextris æquationum (2) insunt, ceteri centum ad efficiendas quinas alias expressiones radicum distribui poterunt. Elevatione autem in dignitatem quintam facta, erit

$$
(3)\quad
\begin{aligned}
&(a+\alpha b+\alpha^4c+\alpha^2d+\alpha^3e)^5=(\alpha a+\alpha^2b+c+\alpha^3d+\alpha^4e)^5=(\alpha^2a+\alpha^3b+\alpha c+\alpha^4d+e)^5=\\
&=(\alpha^3a+\alpha^4b+\alpha^2c+d+\alpha e)^5=(\alpha^4a+b+\alpha^3c+\alpha d+\alpha^2e)^5=\\
&=a^5+b^5+c^5+d^5+e^5+20(a^3bc+ab^3d+abe^3+acd^3+ac^3e+a^3de+bc^3d+b^3ce+bd^3e+cde^3)\\
&+30(ab^2c^2+a^2bd^2+a^2b^2e+a^2c^2d+a^2ce^2+ad^2e^2+b^2cd^2+bc^2e^2+b^2de^2+c^2d^2e)+120abcde\\
&+\alpha[5(a^4b+ac^4+b^4d+ce^4+d^4e)+10(a^2d^3+a^3e^2+b^3c^2+b^2e^3+c^3d^2)+20(ab^3e+a^3cd+ade^3\\
&+bcd^3+bc^3e)+30(a^2b^2c+ab^2d^2+a^2c^2e+bd^2e^2+c^2de^2)+60(abc^2d+abce^2+a^2bde\\
&+acd^2e+b^2cde)]+\alpha^2[5(a^4d+ae^4+bc^4+b^4e+cd^4)+10(a^3b^2+a^2c^3+b^3d^2+c^2e^3+d^3e^2)\\
&+20(ab^3c+abd^3+a^3ce+bde^3+c^3de)+30(a^2be^2+ac^2d^2+a^2d^2e+b^2c^2d+b^2ce^2)\\
&+60(a^2bcd+abc^2e+ab^2de+acde^2+bcd^2e)]+\alpha^3[5(ad^4+a^4e+b^4c+be^4+c^4d)\\
&+10(a^2b^3+a^3c^2+b^2d^3+c^3e^2+d^2e^3)+20(abc^3+a^3bd+ace^3+b^3de+cd^3e)+30(ab^2e^2\\
&+a^2cd^2+a^2de^2+bc^2d^2+b^2c^2e)+60(ab^2cd+a^2bce+abd^2e+ac^2de+bcde^2)]\\
&+\alpha^4[5(ab^4+a^4c+bd^4+c^4e+de^4)+10(a^3d^2+a^2e^3+b^2c^3+b^3e^2+c^2d^3)+20(a^3be+ac^3d\\
&+ad^3e+b^3cd+bce^3)+30(a^2bc^2+a^2b^2d+ac^2e^2+b^2d^2e+cd^2e^2)+60(abcd^2+ab^2ce\\
&+abde^2+a^2cde+bc^2de)],
\end{aligned}
$$

cui dignitati, omnibus permutationibus radicum a, b, c, d, e factis, 24 valores diversi convenient. Construi igitur poterit æquatio 24:i gradus, cujus radices erunt hi valores diversi, coëfficientesque erunt functiones rationales et integræ coëfficientium p, q, r, s, t. Deinde ex omnibus his radicibus extrahentur radices quintæ, unde, quum quinos habeant valores, existent 120 valores diversi, qui, quemadmodum jam indicatum est, ad efficiendas senas expressiones radicum æquationis (1) distribui poterunt. Æquatio autem illa 24:i gradus *æquatio reducta* æquationis generalis quinti gradus appellari poterit.

Quum vero nimii laboris foret constructio hujus æquationis reductæ 24:i gradus, confugiendum videtur ad construendas æquationes 6:i, 12:i, 24:i gradus, quarum radices sint functiones symmetricæ partiales*) in dignitate (3) obviæ, vel alias æquationes, quibus solutis valores harum functionum innotescant. Constat autem, numeros, qui gradus harum æquationum designant, per 5 divisibiles non fore. Nihiloque magis hi numeri erunt 3, 4 aut 8; nulla enim functio, cujus valore cognito opus erit, tres aut quattuor aut octo valores diversos habebit. Unde efficitur, æquationes construendas fore 6:i, 12:i, vel 24:i gradus. Ceterum nihil erit indeterminatum; sunt enim radices æquationum diversarum æquationibus primi gradus inter se conjunctæ. Quamquam eam rem accuratius persequi hoc tempore non licet.

Quod si auctoritate virorum clarissimorum Lagrange et Jacobi uti liceret**), dicere possemus, una tantum æquatione constructa atque soluta opus fore. Quæ sententia nobis ita certe placet, ut, si quis plures æquationes construendas arbitretur, omnes tamen simili quodam modo solvendæ videantur.

Juvabit autem æquationem construxisse, qua soluta æquatio, quam post Cl. Lagrange commemoravit Cl. Jacobi, pro soluta haberi poterit. Sunt igitur radices, quarum mentio est facienda, hæ functiones symmetricæ partiales

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{ll} P_1 . ab = ab+ac+bd+ce+de, & P_{12} . ab = ad+ae+bc+be+cd, \\ P_{11} . ab = ad+ae+bc+bd+ce, & P_2 . ab = ab+ac+be+cd+de, \\ P_{10} . ab = ac+ae+bd+be+cd, & P_3 . ab = ab+ad+bc+ce+de, \\ P_4 . ab = ab+ad+be+cd+ce, & P_9 . ab = ac+ae+bc+bd+de, \\ P_5 . ab = ab+ae+bc+cd+de, & P_8 . ab = ac+ad+bd+be+ce, \\ P_7 . ab = ac+ad+bc+be+de, & P_6 . ab = ab+ae+bd+cd+ce, \end{array}\right.$$

*) Quid per functiones symmetricas partiales intellectum velimus, docent disputationes nostræ: *Solutio æquationis generalis tertii gradus* Ups. 1846, *In functiones symmetricas partiales quattuor quantitatum disquisitio* Ups. 1847.

**) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, herausg. von A. L. Crelle. Tom. XIII Berlin 1835 pag. 345.

omnibusque permutationibus radicum a, b, c, d, e factis nullæ novæ functiones exsistere poterunt. Quamobrem construi quidem posset æquatio duodecimi gradus, cujus radices forent functiones (4), coëfficientesque functionibus rationalibus coëfficientium p, q, r, s, t efficerentur. Facilius vero construi poterunt duæ æquationes sexti gradus, ad qnas ita reduci potest æquatio illa duodecimi gradus, ut coëfficientes, præter functiones rationales coëfficientium p, q, r, s, t, unam tamen contineant radicem quadraticam. Sunt autem radices alterius æquationis $P_1 \cdot ab$, $P_{11} \cdot ab$, $P_{10} \cdot ab$, $P_4 \cdot ab$, $P_5 \cdot ab$, $P_7 \cdot ab$; alterius $P_{12} \cdot ab$, $P_2 \cdot ab$, $P_3 \cdot ab$, $P_9 \cdot ab$, $P_8 \cdot ab$, $P_6 \cdot ab$. Illam scribamus

$$(5) \quad . \quad . \quad y^6 + Py^5 + Qy^4 + Ry^3 + Sy^2 + Ty + U = o,$$

eritque

$$P = -3q,$$
$$Q = 2pr + 3q^2 - 5s,$$
$$R = -4pqr - q^3 + 10qs,$$
$$S = -4p^3t + p^2qs + p^2r^2 + 2pq^2r + 15pqt - 7prs - 8q^2s + qr^2 - 25rt + 15s^2,$$
$$T = 4p^3qt - p^2q^2s - p^2qr^2 - 15pq^2t + 7pqrs + 3q^3s - q^2r^2 + 25qrt - 15qs^2 \mp \mathbf{R},$$
$$\begin{aligned}2U = &-2p^4s^2 - 2p^3q^2t + 2p^3qrs + 12p^3st - 6p^2qrt + 7p^2qs^2 - 4p^2r^2s - 50p^2t^2 + 9pq^3t \\ &- 7pq^2rs + 2pqr^3 - 20pqst + 20pr^2t - 2prs^2 - 15q^2rt + 2q^2s^2 + 7qr^2s + 125qt^2 \\ &- 2r^4 - 50rst + 10s^3 \pm q\,\mathbf{R},\end{aligned}$$

ubi

$$\begin{aligned}\mathbf{R}^2 = {}&256p^5t^3 - 192p^4qst^2 - 128p^4r^2t^2 + 144p^4rs^2t - 27p^4s^4 + 144p^3q^2rt^2 - 6p^3q^2s^2t \\ &- 80p^3qr^2st + 18p^3qrs^3 - 1576p^3qt^3 + 16p^3r^4t - 4p^3r^3s^2 + 160p^3rst^2 - 36p^3s^3t \\ &- 27p^2q^4t^2 + 18p^2q^3rst - 4p^2q^3s^3 - 4p^2q^2r^3t + p^2q^2r^2s^2 + 1020p^2q^2st^2 + 560p^2qr^2t^2 \\ &- 746p^2qrs^2t + 144p^2qs^4 + 24p^2r^3st - 6p^2r^2s^3 + 2000p^2rt^3 - 50p^2s^2t^2 - 630pq^3rt^2 \\ &+ 24pq^3s^2t + 356pq^2r^2st - 80pq^2rs^3 + 2250pq^2t^3 - 72pqr^4t + 18pqr^3s^2 - 2050pqrst^2 \\ &+ 160pqs^3t - 900pr^3t^2 + 1020pr^2s^2t - 192prs^4 - 2500pst^3 + 108q^5t^2 - 72q^4rst \\ &+ 16q^4s^3 + 16q^3r^3t - 4q^3r^2s^2 - 900q^3st^2 + 825q^2r^2t^2 + 560q^2rs^2t - 128q^2s^4t - 630qr^3st \\ &+ 144qr^2s^3 - 3750qrt^3 + 2000qs^2t^2 + 108r^5t - 27r^4s^2 + 2250r^2st^2 - 1600rs^3t \\ &+ 256s^5 + 3125t^4,\end{aligned}$$

quo facto hanc ita scribere licebit

$$y^6 + Py^5 + Qy^4 + Ry^3 + Sy^2 + T'y + U' = o,$$

ubi coëfficientes P, Q, R, S eædem sunt atque in æquatione (5), T' et U' a T et U non differunt nisi signo radicis quadraticæ R mutato.

Ostendimus, vel indicavimus certe, ut per brevitatem necessariam licuit, æquationem generalem quinti gradus ad unam pluresve æquationes 24:i, 12:i vel 6:i gradus reduci posse. Omnem vero reductionem ad alias æquationes quinti gradus primo adspectu simpliciores, quoniam vix quicquam utilitatis ad solutionem conferre videbatur, prætermisimus.

Postremo, si quis quæsiverit, num æquationes illæ 24:i, 12:i vel 6:i gradus ad æquationes aliorum graduum sint reducendæ, declarandum videtur, tales reductiones nobis non placere. Radices enim æquationum diversarum forent functiones quinque quantitatum rationales, numerusque valorum diversorum aut per 5 et per 6 divisibilis; ideoque res in se rediret. Ceterum æquationes illas functiones radicales hisque adjunctæ functiones circulares solvere non possunt. Circumspiciendæ igitur sunt æquationes 6:i, 12:i vel 24:i gradus, quas, quamvis per functiones radicales et circulares non solubiles, solvant aliæ functiones cognitæ. Tales autem æquationes in quintisectione functionum ellipticarum primi generis reperisse videmur. Quamquam in eam rem propter brevitatem, quam nobis injunxit necessitas, accuratius inquirere hac occasione non licet.

Emendandum: In pag. 3 lin. 24 pro quis legatur quispiam

UPSALIAE,

EXCUD. REG. ACAD. TYPOGRAPHUS.

MDCCCLII.